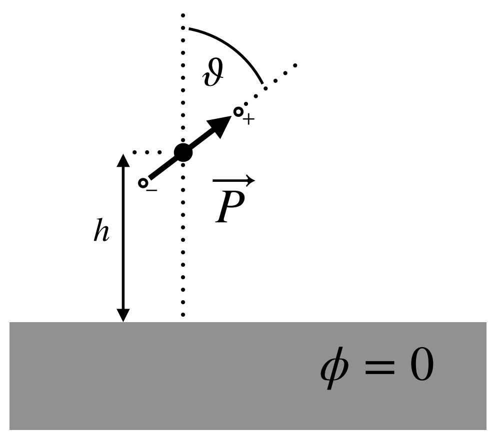
Wolfgang Wieland, 2023

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

5. Übungszettel

***Aufgabe 5.1:** Dipol vor leitender und geerdeter Platte (Hausübung).* Betrachten Sie einen elektrischen Dipol mit Dipolmoment $\vec{P}$ im Abstand h über einer leitenden und geerdeten Platte. Der Winkel zwischen dem Dipolmoment und dem Normalenvektor auf die Platte sei ϑ.



(a) Führen Sie einen geeigneten fiktiven Dipol im Innern der Platte ein um mittels Spiegelladungsmethode das elektrische Potential im Außenraum zu bestimmen.

(b) Wirkt auf den Dipol eine Kraft? Wird er von der Platte an oder abgestoßen?

(c) Bestimmen Sie die Kraft $\vec{F}$ auf den Dipol als Funktion vom Abstand h. *Hinweis:* Denken Sie sich den Dipol aus zwei entgegengesetzten Punktladungen $q_\pm = \pm q$ im Abstand 2ε aufgebaut. Bestimmen Sie die Kraft $\vec{F}_\pm$ auf die beiden Einzelladungen und berechnen Sie daraus die Summe $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-$ im Limes $\varepsilon \to 0$, $2q\varepsilon = P = \text{const.}$

(d) Bestimmen Sie die Arbeit um den Dipol aus seiner Ausgangslage ins Unendliche zu bewegen.

***Aufgabe 5.2:** Polarisierte Kugel (Hausübung).*

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential ϕ und das zugehörige elektrische Feld außerhalb einer Kugel mit Radius R, die eine Ladungsdichte $\sigma(\vartheta, \varphi) = \sigma_o \cos(\vartheta)$ trägt. *Hinweis:* Das Problem besitzt offenbar Rotationssymmetrie um die z-Achse. In der Vorlesung sahen wir, wie die allgemeine Lösung des elektrostatischen Potentials für solch eine Ladungsverteilung in Kugelkoordianten aussieht. Mit $\phi(\vec{x}) \to 0$ für $|\vec{x}| = r \to \infty$, erhielten wir

$$\phi(r, \cos\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^{-l-1} P_l(\cos\vartheta), \tag{1}$$

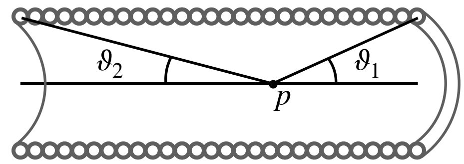
wobei $P_l(\xi)$ gerade die Legendrepolynome sind (mit Normierung $\int_{-1}^{1} d\xi P_l(\xi) P_{l'}(\xi) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$). Die niedrigsten Legendrepolynome lauten $P_{l=0}(\xi) = 1$ und $P_{l=1}(\xi) = \xi$.

(b) Eine Kugel mit Radius R sei mit einem konstanten Dipolmoment $\vec{p} = p\vec{e}_z$ pro Einheitsvolumen polarisiert. Berechnen Sie das elektrostatische Potential ϕ und das zugehörige elektrische Feld außerhalb der Kugel. *Hinweis: Verwenden Sie dazu:*

$$\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \tag{2}$$

$$\int_{|\vec{x}'|<R} d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{|\vec{x}|}. \tag{3}$$

Aufgabe 5.3: *Spule (Präasenzübung).* Bestimmen Sie das Magnetfeld einer von einem Strom I durchflossenen Spule mit N Windungen pro Längeneinheit im Limes $N \to \infty$ entlang der Symmetrieachse der Spule.



(a) Zeigen Sie mit den wie in oben stehender Grafik definierten Winkeln ϑ_1 und ϑ_2, dass für große N das Magnetfeld entlang der Symmetrieachse in guter Näherung durch folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$\vec{B}(p) = 2\pi I N\Big(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2\Big)\vec{e}_z. \tag{4}$$

(b) Es bezeichne a den Radius der Spule und L deren Länge. Es sei $\frac{L}{a} \ll 1$. Zeigen Sie, dass für $\frac{|z|}{L} \ll 1$ und $\frac{\rho}{a} \ll 1$ die radiale Komponente des Magnetfelds in der Umgebung des Mittelpunkts der Spulenachse in guter Näherung durch den Ausdruck

$$B_\rho(z) = 96\pi I N \frac{a^2 \rho z}{L^4} \tag{5}$$

gegeben ist. Die Koordinaten sind an das Problem angepasst: Die z-Achse ist die Symmetrieachse der Spule, die Spulenenden befinden sich in den Ebenen $z = \pm\frac{L}{2}$ und $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ist die radiale Koordinate.