Wolfgang Wieland, 2023

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

8. Übungszettel

***Aufgabe 8.1: Ebene monochromatische Wellen** (Hausübung).* Wir wollen in dieser Übung die Maxwellgleichungen im Vakuum betrachten. Für $\rho = 0$ und $\vec{\jmath} = 0$ erhalten wir

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0.$$

(a) Finden Sie die Lösung der Maxwellgleichungen im Vakuum zum Ansatz

$$\vec{E}(t,z) = \vec{\mathcal{E}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-c^{-1}z)} + \vec{\mathcal{E}}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-c^{-1}z)},$$
$$\vec{B}(t,z) = \vec{\mathcal{B}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-c^{-1}z)} + \vec{\mathcal{B}}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-c^{-1}z)},$$

mit komplex-wertigen Vektoren $\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^3$. Beantworten Sie dabei folgende Fragen: Die Lösung beschreibt offenbar eine ebene Welle. In welche Richtung breitet sie sich aus? Was ist die physikalische Bedeutung von ω? Zeigen Sie, dass mit diesem Ansatz für $\vec{\mathcal{E}}$ die Maxwellgleichungen nur dann erfüllt sein können, wenn $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$ und $\vec{e}_z$ paarweise orthogonal aufeinander stehen. Skizzieren Sie die Lösung der Maxwellgleichungen für die beiden Spezialfälle $\vec{\mathcal{E}} = E_o\vec{e}_x$ (lineare Polarisation) und $\vec{\mathcal{E}} = \frac{E_o}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \mathrm{i}\vec{e}_y)$ (zirkulare Polarisation).

(b) Bestimmen Sie die elektromagnetische Impulsdichte $\vec{G} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{B}$.

(c) Bestimmen Sie die Komponenten des Maxwell'schen Spannungstensors

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = \frac{1}{4\pi}\big(\vec{E}\otimes\vec{E} + \vec{B}\otimes\vec{B} - \frac{1}{2}\mathbb{1}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big)\big),$$

wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix und $\otimes$ das dyadische Produkt (Tensorprodukt) bezeichnet. Es ist in dieser Schreibweise z.B.

$$\mathbb{1} = \vec{e}_x\otimes\vec{e}_x + \vec{e}_y\otimes\vec{e}_y + \vec{e}_z\otimes\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_x\otimes\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(d) Bestimmen Sie das zeitliche Mittel $\langle\ldots\rangle$ von Spannungstensor und Impulsdichte über viele Schwingungsperioden. Benützen Sie dazu die Tatsache, dass das zeitliche Mittel von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}$ für $n \neq 0$ über viele Schwingungsperioden verschwindet.

***Aufgabe 8.2: Eindringtiefe elektromagnetischer Wellen** (Präsenzübung).* Die elektrische Leitfähigkeit σ_{ij} eines Stoffes ist ein Tensor, der die Beziehung zwischen darin auftretender Stromdichte $\vec{\jmath}$ und angelegtem $\vec{E}$-Feld beschreibt. In Komponentennotation ergibt sich (mit Einstein'scher Summenkonvention) $j_i = \sigma_{ij}E^j$. Für homogene Stoffe, wie zum Beispiel Wasser, vereinfacht sich die Formel.

Stromdichte und angelegtes $\vec{E}$-Feld sind nun zueinander proportional

$$\vec{\jmath} = \sigma\vec{E}. \tag{1}$$

Die hier auftretende Leitfähigkeit σ ist eine vom jeweiligen Stoff abhängige Materialkonstante.

Wir wollen nun sehen, wie weit elektromagnetische Wellen in Stoffe mit gegebener Leitfähigkeit eindringen können. Wir denken uns dazu einen Körper im Halbraum $z > 0$. Die x-y-Ebene ist die Grenzfläche zwischen Körper und Außenraum (Vakuum). Auf den Körper soll nun eine ebene elektromagnetische Welle treffen, die sich entlang der z-Richtung ausbreiten soll. Wie weit wird diese Welle in den Körper dringen können? Betrachten Sie dazu folgenden Ansatz für das elektromagnetische Feld im Bereich $z > 0$:

$$\vec{E}(t,z) = \Big(\mathcal{E}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathcal{E}^*(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\Big)\vec{e}_x. \tag{2}$$

Für viele Metalle liefern die üblichen Maxwellgleichungen für Frequenzen im Bereich des sichtbaren Lichts eine gute Näherung um die Felder im Innern zu beschreiben.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 4\pi\rho, & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0,\\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} &= \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}, & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

(a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen und der Identität $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \Delta\vec{V}$ eine Differentialgleichung für $\mathcal{E}(z)$ her. Lösen Sie diese Gleichung für $\sigma \gg \omega$ und zur Randbedingung $\mathcal{E}(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Wiederholen Sie die Rechnung für das zugehörige $\vec{B}$-Feld.

(b) Zeigen Sie, dass die elektromagnetischen Felder im Medium in die Ausbreitungsrichtung exponentiell gedämpft sind, d.h. $\vec{E}(t,z) \propto \mathrm{e}^{-\frac{z}{d}}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(\omega t - k^* z)}$. Bestimmen Sie die Eindringtiefe d als Funktion der Kreisfrequenz ω und der Leitfähigkeit für $\sigma \gg \omega$. Bestimmen Sie die Kreiwellenzahl k^* im Medium.

(c) Für Meerwasser ist $\sigma \approx 5.7\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ in SI Einheiten (Siemens/Meter). Das bedeutet $\sigma \approx 5.0\cdot 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$ in den hier verwendeten cgs Einheiten.* Für Silber, einen hervorragenden Leiter, ist $\sigma \approx 6.1\cdot 10^7\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ in SI bzw. $\sigma \approx 5\cdot 10^{19}\,\mathrm{s}^{-1}$ in cgs. Bestimmen Sie die Eindringtiefe d von Radiowellen in Meerwasser mit Kreisfrequenz $100\,\mathrm{Hz}$. Bestimmen Sie die Eindrigtiefe von rotem Licht (Wellenlänge $\lambda \approx 700$nm) in Silber.

*Der Umrechnungsfaktor ist annähernd $9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{S\cdot s}}$.