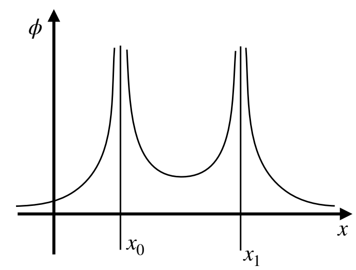
Wolfgang Wieland, 2023

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

2. Übungszettel

Abgabe online bis zum Montag, den 01. Mai 2023

***Aufgabe 2.1:** Gibt es elektrostatische Fallen? (Hausübung).* Aus der Poissongleichung ($\Delta\phi = -4\pi\rho$) folgt, dass im ladungsfreien Raum das elektrostatische Potential $\phi(\vec{x})$ keine Maxima oder Minima besitzt (wenn Sie die Lösung dieser Übung in der Übungsgruppe vorstellen, begründen Sie bitte diesen Sachverhalt). Betrachten Sie nun zwei positive Ladungen an den Orten



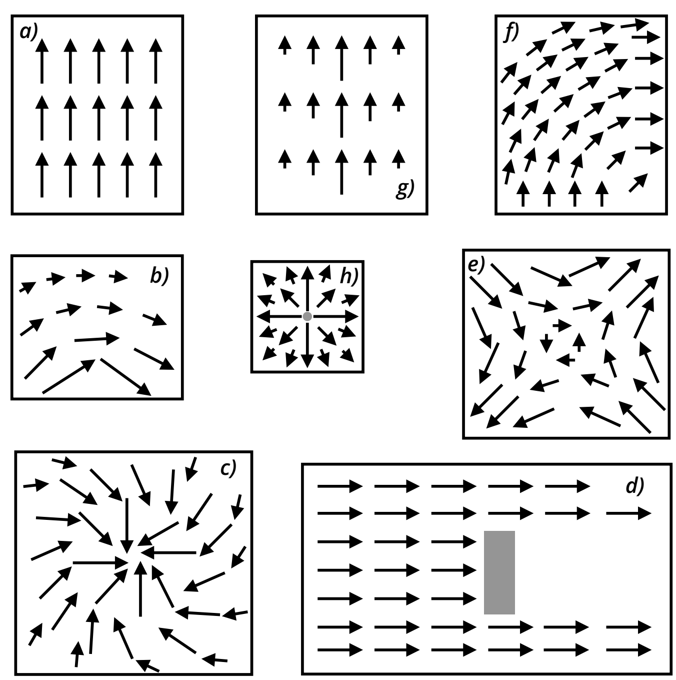
$$\vec{x}_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}, \quad x_o \neq x_1.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass das Potential entlang der Verbindungsstrecke zwischen $\vec{x}_o$ and $\vec{x}_1$ ein Minimum besitzt. Ist das ein Widerspruch zur Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$? Lässt sich mittels dieser Ladungskonfiguration eine positive Ladung im Bereich zwischen $\vec{x}_o$ und $\vec{x}_1$ fangen? Begründen Sie Ihre Antwort.

***Aufgabe 2.2:** Faraday'sche Feldlinien (Hausübung).* Statische elektrische Felder $\vec{E}(\vec{x})$ haben im leeren Raum verschwindende Rotation und Divergenz, also $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Aus dem Gauß'schen und Stoke'schen Integralsätzen folgt damit für alle drei-dimensionalen ladungsfreien Gebiete V und zwei-dimensionale Flächen F, dass

$$\int_V d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial V} d^2\vec{S} \cdot \vec{E} = 0, \qquad (1)$$

$$\int_F d^2\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0. \qquad (2)$$



Betrachten Sie die rechts skizzierten elektrischen Felder $\vec{E}(x, y)$ in der x-y-Ebene, die unabhängig von z seien. Grau hinterlegte Bereiche enthalten mögliche Ladungsverteilungen, ansonsten verschwindet ρ überall sonst im gerahmten Bereich. Welche dieser Feldkonfigurationen könnten im angegebenen Bereich ein elektrostatisches Feld beschreiben? Wo müssten sich die zugehörigen Ladungen oder Ladungsdichten befinden um diese Felder gegebenenfalls zu erzeugen? Ist es möglich ein Schild aus unbekanntem Material zu finden, so dass die elektrischen Felder, auf die in Abbildung d) angegebene Weise, hinter dem Schild verschwinden?

***Aufgabe 2.3:** Ladungsdichte mit Zylindersymmetrie (Hausübung).* Betrachten Sie Zylinderkoordianten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Es sei nun folgendes elektrisches Feld gegeben

$$\vec{E}(\vec{x}) = E_o \begin{cases} \frac{\rho^2}{a^2}\hat{\rho}, & 0 < \rho < a, \\ \frac{a}{\rho}\hat{\rho}, & \text{überall sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Ladungsdichte[1] ϱ aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\varrho$.

***Aufgabe 2.4:** Elektrisches Feld einer Kugel (Präsenzübung).* Eine Kugel mit Radius R trage eine sphärisch-symmetrische Ladungsdichte ρ, die sich als Funktion vom Abstand r vom Mittelpunkt wie $\rho = \frac{Q(n+3)}{4\pi R^3}\left(\frac{r}{R}\right)^n, n \neq -3$ schreiben lasse. Außerhalb der Kugel verschwinde die Ladungsverteilung ganz. Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass Q die Gesamtladung der Kugel ist. Finden Sie das elektrische Feld der zugehörigen Ladungsverteilung. Benützen Sie dazu Symmetrieüberlegungen, um zu argumentieren, dass das elektrische Feld im ganzen Raum die Form $\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\hat{x}$ habe, wobei $\hat{x}$ das Einheitsvektorfeld $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$ (wie im ersten Übungsblatt) bezeichne.

[1] Wir schreiben hier außnamsweise ϱ statt ρ um die Zylinderkoordiante ρ von der Ladungsdichte ϱ zu unterscheiden.