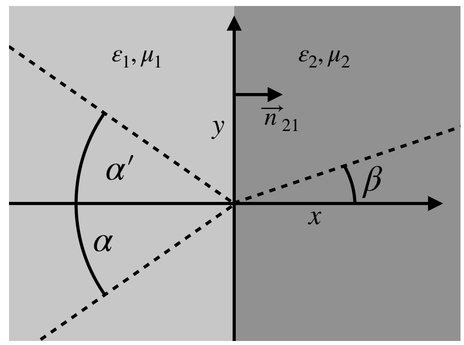
Wolfgang Wieland, 2023

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

11. Übungszettel

***Aufgabe 11.1: Elektromagnetische Felder in der Materie** (Hausübung).* In der kommenden Vorlesung besprechen wir die gemittelten (effektiven) Maxwellgleichungen in linearen Medien:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{D}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}.$$



Hier sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die makroskopischen elektromagnetischen Felder, $\vec{D}$ is die elektrische Verschiebung und $\vec{H}$ bezeichnet die magnetische Feldstärke. Die $\vec{D}$- und $\vec{H}$-Felder sind nicht unabhängig von $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Es bestehen Materialgleichungen. Diese verknüpfen die Dipoldichte $\vec{P}$ und Magnetisierung $\vec{M}$ des Mediums mit den Differenzen $\vec{D}-\vec{E}$ und $\vec{H}-\vec{B}$,

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \qquad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}.$$

Für sog. lineare Medien vereinfacht sich der Zusammenhang weiter. Es gibt nun Materialkonstanten μ (magnetische Permeabilität) und ε (Permittivität), so dass $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

(a) Betrachten Sie eine ebene Wellen in einem solchen Medium. Setzen Sie $\vec{j} = 0$ and $\rho = 0$ (keine freien Ladungen). Bestimmen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit v und den *Brechungsindex* $n = c/v$.

(b) Betrachten Sie zwei aneinander grenzende Materialien, wie in der Skizze angedeutet. Am Anfang der Vorlesung hatten wir gezeigt, wie sich aus Gauß'schem und Stokes'schem Satz* Stetigkeitsbedingungen für die Felder entlang von Grenzflächen finden lassen. Integrieren Sie $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}$ und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ über eine kleine Box B, die ein Flächenelement auf der Grenzfläche umschließen soll, wenden Sie den Gauß'schen Satz an und zeigen Sie für zeitunabhängige Felder:

$$\big(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\big)\cdot\vec{n}_{21}\Big|_{x=0} = 4\pi\sigma, \qquad \big(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\big)\cdot\vec{n}_{21}\Big|_{x=0} = 0,$$

wobei σ die Flächenladungsdichte entlang der Grenzfläche bezeichnet.

(c) Anstelle einer Box wählen wir nun eine kleine Fläche F, deren Normalenvektor $\vec{n}$ in der Grenzfläche liegen soll. Es werden also die Fälle $\vec{n} = \vec{e}_y$ und $\vec{n} = \vec{e}_z$ zu unterscheiden sein. Betrachten Sie den Fluss $\int_F d^2\vec{S}\cdot\vec{V}$ für $\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{H}$ und $\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$. Leiten Sie mittels Stokes'schem Satz für eine beliebig kleine solche Fläche F folgende Anschlussbedingungen für zeitunabhängige Felder her,

$$\vec{n}_{21}\times\big(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\big)\Big|_{x=0} = \frac{4\pi}{c}\vec{K}, \qquad \vec{n}_{21}\times\big(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\big)\Big|_{x=0} = 0,$$

wobei $\vec{K}$ eine mögliche Flächenstromdichte entlang der Grenzfläche bezeichnet.

---

*Gauß: $\int_B d^3x\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \oint_{\partial B} d^2\vec{x}\cdot\vec{D}$, Stokes: $\int_F d^2\vec{x}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \oint_{\partial F}\vec{x}\cdot\vec{E}$.

***Aufgabe 11.2: Lichtbrechung** (Hausübung).* In der Übung (11.1) fanden wir, dass in Medien mit Brechungsindex n die Ausbreitungsgeschwindigkeit v von elektromagnetischen Wellen nicht mehr gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist. Es gilt nun der Zusammenhang $v = c/n$. Wir wollen nun wissen, was mit einer ebenen Welle geschieht, wenn sie von einem solchen Medium in ein anderes übergeht. Es bewege sich also eine monochromatische, ebene, linear in z-Richtung polarisierte Welle ($\vec{E}_o(t,\vec{x}) = \mathcal{E}_o \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\vec{k}_o\cdot\vec{x}}\vec{e}_z + \mathrm{cc.}$) in einem Medium mit Brechungsindex n_1. Die Welle treffe, wie in der Skizze oben angedeutet, in einem Winkel α auf eine Grenzfläche zu einem zweiten Medium mit Brechungsindex n_2.

(a) Ein Teil des Felds wird reflektiert, ein Teil wird in das benachbarte Medium als transmittierte Welle $E_2(t,\vec{x})$ eindringen. Geben Sie einen Ausdruck für das elektrische und magnetische Feld in beiden Halbräumen an. Schreiben sie dazu die Felder im linken Halbraum als Superposition einer eingehenden und einer reflektierten ebenen Welle $\vec{E}_1 = \vec{E}_o + \vec{E}_r$. Bestimmen Sie Frequenz und Wellenzahlvektor der ebenen Wellen in beiden Halbräumen.

(b) Es gelten gewisse Anschlussbedingungen entlang der Grenzfläche, die verschiedene Feldkomponenten in den beiden Halbräumen miteinander in lineare Beziehung setzen werden. Warum lässt sich aus dieser einfachen Tatasche sofort folgern – und zwar ohne die genaue Form der Stetigkeitsbedingungen zu kennen –, dass die Frequenz der reflektierten und der transmittierten Welle gleich der einkommenden Welle sein wird?

(c) Folgern Sie auf die gleiche Weise wie in (b), dass die y-Abhängigkeit aller drei Wellen gleich sein muss. Erklären Sie, warum daraus sofort $\alpha = \alpha'$ sowie das bekannte Brechungsgesetz von Snellius folgt, d.h.

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta.$$

(d) Verwenden Sie die Stetigkeitsbedingungen*

$$\big(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\big)\cdot\vec{n}_{21}\Big|_{x=0} = 0, \qquad \vec{n}_{21}\times\Big(\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2 - \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1\Big)\Big|_{x=0} = 0, \qquad \vec{n}_{21}\times\big(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\big)\Big|_{x=0} = 0,$$

um folgende Gleichungen zwischen den (komplexen) Amplituden $(\mathcal{E}_o, \mathcal{E}_r, \mathcal{E}_2)$ der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen zu zeigen:

$$\frac{\mathcal{E}_o}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1\cos\alpha + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}}{2n_1\cos\alpha},$$
$$\frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_o} = \frac{n_1\cos\alpha - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}}{n_1\cos\alpha + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}}.$$

*Die Materialkonstanten μ_1 und μ_2 sind die magnetische Permeabilität der beiden Medien.