Wolfgang Wieland, 2023

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

10. Übungszettel

***Aufgabe 10.1: Eichtransformationen** (Hausübung).* In der Vorlesung hatten wir die Lorentzeichung eingeführt. In dieser Aufgabe wollen wir andere mögliche Eichungen besprechen.

(a) Die Coulombeichung ist dadurch charakterisiert, dass die Divergenz des Vektorpotentials verschwindet, d.h. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Zeigen Sie, dass das skalare Potential ϕ in dieser Eichung die Poissongleichung $\Delta\phi = -4\pi\rho$ erfüllt. Zeigen Sie außerdem mittels der Green'schen Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} : \Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, dass sich in der Coulombeichung die Lösung $\phi(t, \vec{x})$ der Poissongleichung zu gegebenem Zeitpunkt t stets als Funktion der *gleichzeitig* auftretenden Ladungsdichte $\rho(t, \vec{x}')$ schreiben lässt und zwar selbst dann, wenn der Messpunkt $\vec{x}$ Lichtjahre von der Quelle $\vec{x}'$ entfernt ist. Widerspricht dies dem Kausalitätsprinzip? Kommt es hier zu einer instantanen Fernwirkung? Ließe sich auf diese Weise Information mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen?

(b) In der Weyleichung ist hingegen $\phi = 0$. Zeigen Sie, ausgehend von einem allgemeinen skalaren Eichpotential $\phi(t, \vec{x})$, dass sich diese Eichbedingung mittels einer geeigneten Eichtransformation stets erfüllen lässt.

(c) Bestimmen Sie für die Potentiale $\phi(t, \vec{x}) = 0$, $\vec{A}(t, \vec{x}) = -q\, ct \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$ die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder sowie die zugehörigen Ladungs- und Stromdichten.

(d) Betrachten Sie den Eichparameter $\chi(t, \vec{x}) = -q\, ct \frac{1}{|\vec{x}|}$, sowie die Eichpotentiale $\phi(t, \vec{x})$ und $\vec{A}(t, \vec{x})$ aus der Teilaufgabe (c). Führen Sie eine Eichtransformation durch und bestimmen Sie die so entstehenden neuen (eichäquivalenten) Potentiale $\phi'(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{c}\partial_t\chi(t, \vec{x})$ und $\vec{A}'(t, \vec{x}) = \vec{A}(t, \vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t, \vec{x})$.

***Aufgabe 10.2: Retardiertes Potential eines bewegten geladen Drahtes** (Hausübung).* Ein unendlich ausgedehnter unendlich dünner gerader und gleichmäßig geladener Draht (konstante Linienladungsdichte λ) ruhe für $t < 0$ entlang der z-Achse.

(a) Bestimmen Sie für $t < 0$ das elektrostatische Feld in einem Abstand $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Draht.

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginne der Draht plötzlich sich mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der positiven z-Achse zu bewegen. Finden Sie die diesen Vorgang beschreibende Stromdichte $\vec{j}(t, \vec{x})$. Berechnen Sie das retardierte Vektorpotential (in Lorentzeichung) $\vec{A}(t, \rho)$. Warum hängt $\vec{A}(t, \rho)$ nicht von den Koordinaten z und $\varphi = \arctan(\frac{x}{y})$ ab? Wie lautet $\vec{A}(t, \rho)$ für $t > \rho/c$ und $t < \rho/c$?

(c) Bestimmen Sie das $\vec{B}$-Feld des Drahts aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ für $t \to \infty$. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Biot-Savart'schen Gesetz.

***Aufgabe 10.3: Jefimenkos Gleichungen** (Präsenzübung).*

(a) Gehen Sie von den allgemeinen Ausdrücken für die retardierten Potentiale $\phi_{ret}(t,\vec{x})$ und $\vec{A}_{ret}(t,\vec{x})$ für gegebene Quellen $\rho(t,\vec{x})$ und $\vec{\jmath}(t,\vec{x})$ aus und berechnen Sie daraus das zugehörige elektromagnetische Feld $(\vec{E},\vec{B})$ als Funktion von $\rho(t,\vec{x})$ und $\vec{\jmath}(t,\vec{x})$ und deren partieller (Zeit-)Ableitungen. *Hinweis:* Vergessen Sie nicht die implizite $\vec{x}$-Abhängigkeit der Potentiale aufgrund der $\vec{x}$-Abhängigkeit der retardierten Zeit $t_{ret} = t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|$ zu berücksichtigen. Beachten Sie auch $\vec{\nabla}|\vec{x}-\vec{x}'|^n = n|\vec{x}-\vec{x}'|^{n-1}\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$.

(b) Betrachten Sie nun die Kontinuitätsgleichung der zugehörigen Ladungsverteilung $\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} = 0$ (Erhaltungssatz der Ladung). Leiten Sie daraus ab, dass für eine stationäre Stromdichte – für eine Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{x})$ also, die unabhängig von der Zeit t ist – die Ladungsdichte linear in de Zeit sein muss: $\rho(t,\vec{x}) = \rho_o(\vec{x}) + t\sigma(\vec{x})$. Zeigen Sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi_{ret} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}_{ret}$ einer solchen Ladungs- und Stromverteilung das Coulombgesetz erfüllt.

(c) Es sei nun $\vec{\jmath}(t,\vec{x})$ eine sich nur langsam zeitlich ändernde Stromverteilung, so dass Sie in guter Nährung die Taylorreihe $\vec{\jmath}(t_{ret},\vec{x}) = \vec{\jmath}(t,\vec{x}) + (t_{ret}-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath}(t,\vec{x}) + \ldots$ nach den ersten beiden Gliedern abbrechen können. Zeigen Sie, dass das resultierende $\vec{B}$-Feld das Biot-Savarts'che Gesetz erfüllt.