# Inhalt der heutigen Vorlesung

- Elektrodynamik in Materie
- Relativistische Elektrodynamik

# Zusammenfassung Dipolstrahlung

Vektorpotential

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \vec{A}_\omega(\vec{x}) + c.c. =$$

$$\approx -\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}\,c} \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \vec{p}_\omega + c.c.$$

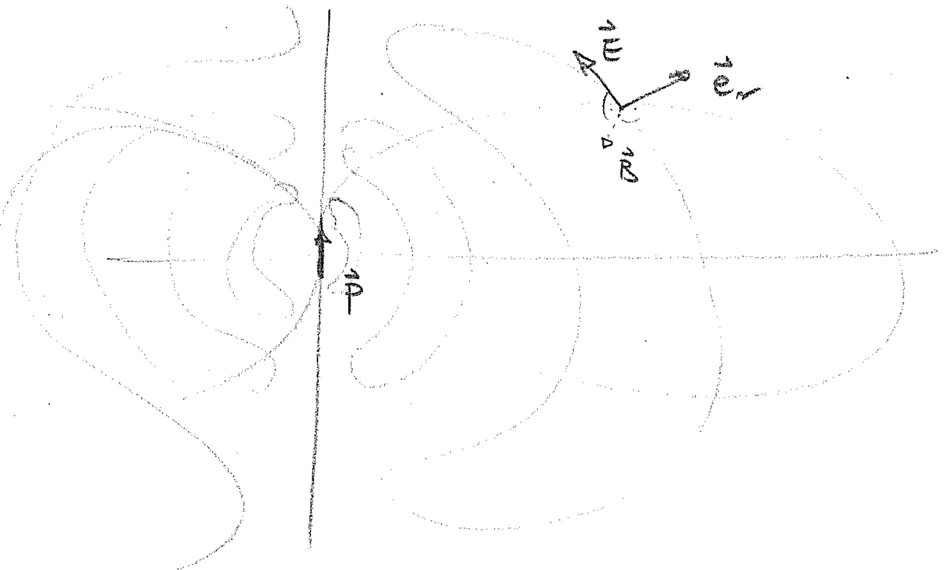
$\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder

$$\vec{B}_\omega(\vec{x}) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{e}_r \times \vec{p}_\omega + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\vec{E}_\omega(\vec{x}) = + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\vec{p}_\omega - \vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{p}_\omega)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Abgestrahlte Leistung

$$d^2P = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \langle \vec{p}^{\,2} \rangle \sin^2\vartheta \, d^2\Omega$$



# Elektromagnetische Felder in Materie

wir gehen von den mikroskopischen Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 4\pi \rho_{micro} \,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{b} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{micro} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{e} \,, \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{b}$$

aus und mitteln diese über makroskopische Längenskala $L$

Makroskopische Zustandsgrößen und Felder $O(t,\vec{x})$ als räumliche Mittelwerte

$$O(t,\vec{x}) = \langle O_{micro}(t,\vec{x}) \rangle$$

aufzufassen.

wobei

$$\langle O(t,\vec{x})\rangle = \int d^3x' \, O(t,\vec{x}')\, f(\vec{x}-\vec{x}')$$

d.h. Mittelung ersetzt z.B. $\delta(\vec{x})$ durch $f(\vec{x})$ mit Eigenschaften

(i) $f$ ist Testfunktion

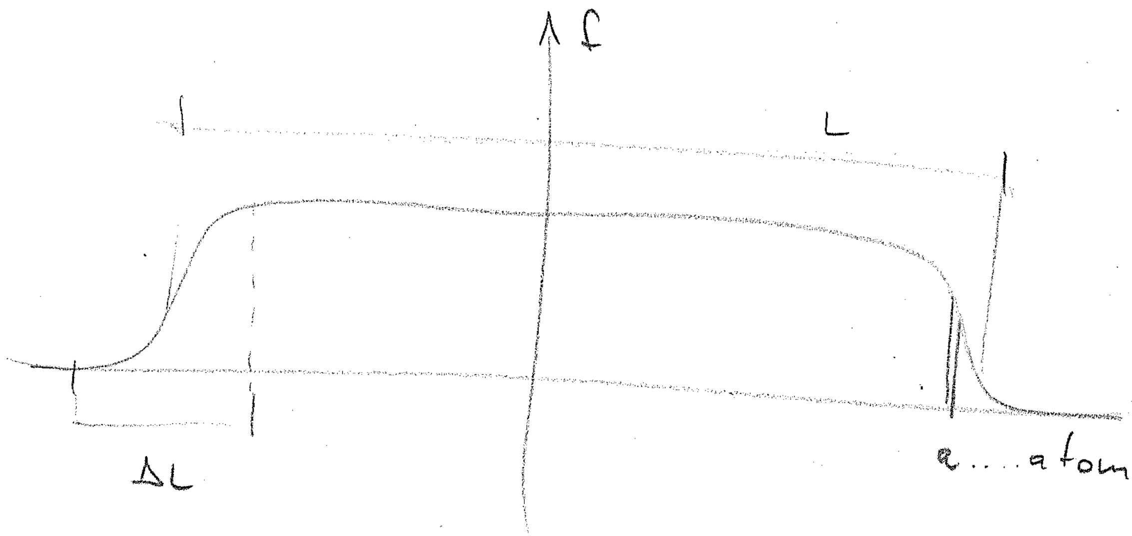
(ii) $f(\vec{x}) = f(|\vec{x}|)$

(iii) $f(\vec{x}) > 0$

(iv) $\int d^3x \, f(\vec{x}) = 1$

(v) $f(\vec{x}) = 0 \quad \forall \, |\vec{x}| > L$

sowie




a ... atomare Skala

Es besitze die Ladungs- und Stromdichte die Zerlegungen

gebundene Ladungsträger

$$\rho_{micro} = \boxed{\rho_{frei}} + \boxed{\rho_{geb}}$$

$$\vec{J}_{micro} = \boxed{\vec{J}_{frei}} + \boxed{\vec{J}_{geb}}$$

freie Ladungsträger

die in Molekülen gebundenen Ladungsträger erzeugen ($\rho_{geb}$, $\vec{J}_{geb}$)

es sei $\vec{X}_n$ der als ruhend angenommene Ort des n-ten Moleküls und $\vec{\xi}_{n,k}$ bezeichne für $k = 1, \ldots$ die Ortsvektoren von dessen Konstituenten

Wir entwickeln die gemittelte Ladungs- und Stromdichte des n-ten Moleküls in Taylorreihe bzgl. $\vec{\xi}_{n,k}$; d.h.

$$\rho_n(t,\vec{x}) = \sum_{k\in M_n} q_k \langle \delta(\vec{x}-\vec{X}_n-\vec{\xi}_{n,k}(t))\rangle =$$

$$= \sum_{k\in M_n} q_k\, f(\vec{x}-\vec{X}_n-\vec{\xi}_{n,k}(t)) =$$

$$= \sum_{k\in M_n} q_k\, f(\vec{x}-\vec{X}_n) + \qquad \text{Dipolmoment!}$$

$$- \sum_{k\in M_n} q_k\, (\vec{\xi}_{n,k}(t)\cdot\vec{\nabla})\, f(\vec{x}-\vec{X}_n) +$$

$$+ \mathcal{O}(\xi^2) =$$

$$= \rho_n^{(0)}(\vec{x}) + \delta\rho_n(t,\vec{x}) \;; \quad \rho_n^{(0)}(\vec{x}) = \sum_{k\in M_n} q_k\, f(\vec{x}-\vec{X}_n)$$

$$\vec{J}_n(t,\vec{x}) = \sum_{k\in M_n} q_k \frac{d}{dt}\vec{\xi}_{n,k}(t)\; f(\vec{x}-\vec{X}_n-\vec{\xi}_{n,k}(t)) =$$

$$= \mathcal{O}(\xi)$$

wir definieren die makroskopische Strom- und Ladungsdichte

$$\rho = \langle \rho_{frei} \rangle + \sum_{n \in M} \rho_n^{(0)}(\vec{x})$$

$$\vec{j} = \langle \vec{j}_{frei} \rangle$$

es ist

$$\langle \rho_{micro} \rangle = \rho + \delta\rho$$

$$\langle \vec{j}_{micro} \rangle = \vec{j} + \delta\vec{j}$$

wobei

$$\delta\rho(t,\vec{x}) = \sum_{n \in M} \delta\rho_n(t,\vec{x}) = \mathcal{O}(\xi)$$

$$\delta\vec{j}(t,\vec{x}) = \sum_{n \in M} \vec{j}_n(t,\vec{x}) = \mathcal{O}(\xi)$$

klar dass

$$\delta\dot{\rho}(t,\vec{x}) + (\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{j})(t,\vec{x}) = 0$$

Wir definieren die gemittelten Felder

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \langle \vec{e}(t,\vec{x}) \rangle$$
$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \langle \vec{b}(t,\vec{x}) \rangle$$

Linearität der Maxwellgleichungen erlaubt Lösung für $(\vec{E},\vec{B})$ zu $(\langle \rho_{micro} \rangle, \langle \vec{j}_{micro} \rangle)$ als Summe von Lösungen $(\vec{E}_0, \vec{B}_0)$ und $(\delta\vec{E}, \delta\vec{B})$ zu $(\rho, \vec{j})$ und $(\delta\rho, \delta\vec{j})$ (mit $(\delta\vec{E}, \delta\vec{B}) = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$) zu schreiben.

..... dies ist möglich da Mittelwertbildung mit partiellen Ableitungen vertauscht

..... d.h. ...

$$\partial_t \vec{E} = \langle \partial_t \vec{e} \rangle \quad , \quad \partial_i \vec{E} = \langle \partial_i \vec{e} \rangle$$
$$\partial_t \vec{B} = \langle \partial_t \vec{b} \rangle \quad , \quad \partial_i \vec{B} = \langle \partial_i \vec{b} \rangle$$

... wir erhalten also sofort...

## Homogene Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$$

## Inhomogene Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi (\rho + \delta\rho) =$$

$$= 4\pi\rho + \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{E} =$$

$$= 4\pi\rho - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$\vec{P} := -\frac{1}{4\pi} \delta\vec{E}$ ... Polarisation ebenso

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \delta\vec{j}) + \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \vec{\nabla} \times \delta\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \delta\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{4\pi}{c}\partial_t\vec{P} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}$$

mit

$$\vec{M} := \frac{1}{4\pi}\delta\vec{B} \quad \ldots \quad \text{Magnetisierung}$$

Makroskopische $\vec{D}$ und $\vec{H}$ Felder

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{H} &= \vec{B} - 4\pi\vec{M} \end{aligned}}$$

..... war $\vec{E}_0$

..... war $\vec{B}_0$

## Makroskopische Maxwellgleichungen

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho\,, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{D}\,, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}}$$

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ ... elektrische Flussdichte

$\vec{H} = \vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{M}$ ... magnetisches Feld

### Materialgleichungen

isotrope Medien

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\,, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$\varepsilon$: Permitivität

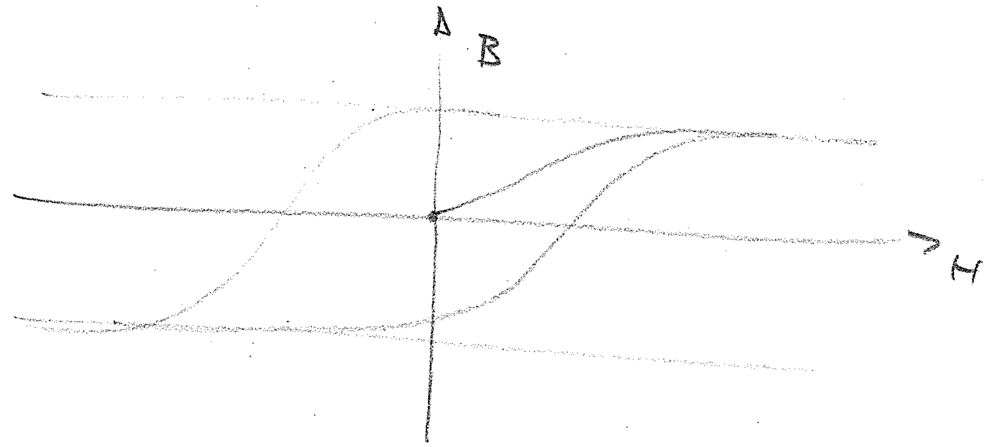
$\mu$: Magnetische Permeabilitat

anisotrope Medien

$$D^i = \varepsilon^i{}_j E^j , \qquad B^i = \mu^i{}_j H^j$$

allgemein jedoch nichtlinearer Zusammenhang

$$\mu = \frac{dB}{dH}$$




$\mu \gg 1$ ... Ferromagnetismus

$\mu > 1$ ... Paramagnetismus: $\vec{B}$ und $\vec{M}$ zeigen in selbe Richtung

$\mu < 1$ ... Diamagnetismus: $\vec{B}$ und $\vec{M}$ sind antiparallel orientiert

Ohm'sches Gesetz

$$j^l = \sigma^l{}_k E^k \quad , \ldots \ \sigma \text{ ist elektrische Leitfähigkeit}$$

# Relativistische Elektrodynamik

## Postulat

- Die Vakuummaxwellgleichungen sind in allen Inertialsystemen gleich (nehmen also selbe Form an)
- D.h. insbesondere: die Lichtgeschwindigkeit ist eine universelle Konstante c, die für alle Beobachter gleich sein muss

## Ereignisse

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$ .... Ereignisvektor in der Raumzeit

## Intervalle

$$\Delta X^\mu = X_2^\mu - X_1^\mu$$

Verschiedene Inertialsysteme hängen über affine Transformationen zusammen

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu - T^\mu$$

$\hat{=}$ Translation

$$\Lambda^\mu{}_\nu \in GL(4,\mathbb{R})$$

Falls zwei Ereignisse $x_1^\mu$ und $x_2^\mu$ über Lichtsignal verbunden sind muss

$$c^2 \Delta t^2 - |\Delta \vec{x}|^2 = 0$$

diese Gleichung soll für alle Beobachter und überhaupt für alle solche Lichtsignale gelten.

damit lässt sich leicht zeigen, dass für beliebige Intervalle (also nicht nur solche, die zwei Ereignisse verbinden, die über ein Lichtsignal zusammenhängen) $\Delta x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu$ und $\Delta y^\mu = y_2^\mu - y_1^\mu$ das Minkowski-Produkt

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta y^\nu = -\Delta x^0 \Delta y^0 + \Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{y}$$

invariant vom Bezugssystem sein muss

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta y^\nu = \eta_{\mu\nu} \Delta \tilde{x}^\mu \Delta \tilde{y}^\nu$$

dies schränkt die linearen Transformationen $\Lambda^\mu{}_\nu$ auf Lorentztransformationen ein

## Rotationen

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{R^{i}{}_{j}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$R^{i}{}_{j} \in O(3)$$

## Transformation in mit $\vec{v}$ bewegtes Bezugssystem (Boosts)

Boosts in z.B. z-Richtung

$$\Delta\tilde{t} = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c}\Delta z\right)$$

$$\Delta\tilde{z} = \gamma\left(\Delta z - v\,\Delta t\right)$$

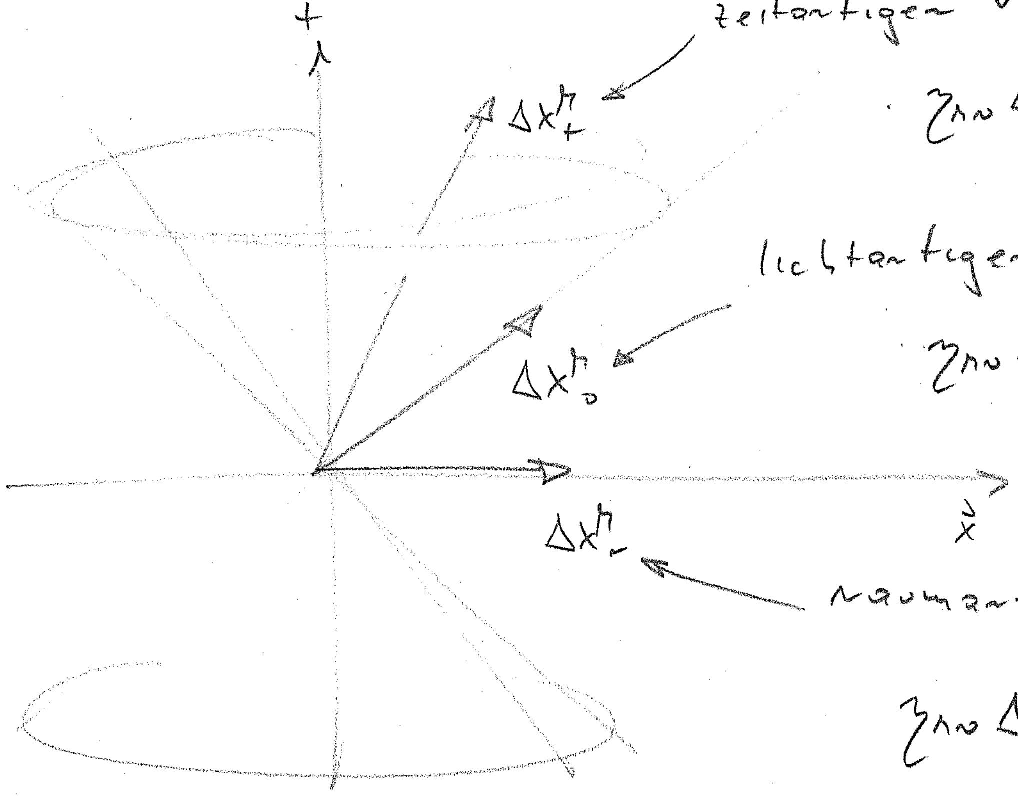
mit $\gamma$-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

## Boosts

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{\vec{v}^T}{c} \\ -\gamma \frac{\vec{v}}{c} & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

## Lichtkegelstruktur




zeitartiger Vektor

$\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu_+ \Delta x^\nu_+ < 0$

lichtartiger Vektor

$\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu_0 \Delta x^\nu_0 = 0$

raumartiger Vektor

$\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu_- \Delta x^\nu_- > 0$

Außerdem diskrete Transformationen

Zeitumkehr : $T$

Parität : $P$

Spiegelungen : $S$

## Eigenzeit

Weltlinie eines ruhenden Beobachters

$$X^\mu(t) = X^\mu_0 + ct \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

invariante Formulierung bzgl. beliebigen Beobachters

$$X^\mu(t) = X^\mu_0 + ct\, u^\mu$$

$\hookrightarrow$ Vierer-Geschwindigkeit

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$$

Eigenzeit entlang beliebigen Weltlinie

$$\tau(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{d}{dt} X^\mu(t) \frac{d}{dt} X^\nu(t)}$$

## Vierer-Impuls

$$p^\mu = mc\, u^\mu = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{v}}{c} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Maxwellgleichungen}}$$

Ableitungen

$$\partial_\mu = \left(\tfrac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla}^T\right)$$

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{c}\partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

Vierer-Stromvektor

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = \partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

→ Ladungserhaltung

## Vektorpotential

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \; ; \quad A_\mu = (-\phi, \vec{A}^T)$$

## Eichtransformationen

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$$

## Lorentzeichung

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

## Wellengleichung

$$\Box A^\mu = -4\pi j^\mu$$

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu \; ; \quad \eta^{\mu\rho}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\nu$$

# Faradaytensor

betrachte

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

so ist für $i = 1, 2, 3$

$$F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i =$$

$$= -\partial_i \phi - \frac{1}{c}\partial_t A_i = E_i$$

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B_3 \quad \text{(zyklisch)}$$

## Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi j^\nu$$

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0$$

## Lorentzkraft

$$\frac{d}{d\tau} u^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu$$

Eigenzeit