Inhalt der heutigen Vorlesung

- Eichtransformationen und Eichpotentiale
- Greenfunktion und retardierte Potentiale
- Dipolstrahlung

Eichtransformationen und Eichpotentiale

in Elektro- und Magnetostatik erwiesen sich das Coulomb- und Vektorpotential als nützliche Hilfsgrößen

in der Elektrodynamik lassen sich ebensolche Hilfsfelder $(\phi, \vec{A})$ einführen

betrachte dazu Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$$

aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ folgt (mittels Helmholtzzerlegung):
es existiert Vektorpotential $\vec{A}(t,\vec{x})$ so daß

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

dieses ist eindeutig bis auf Eichtransformationen
$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$

damit

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

also

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}\right) = 0$$

damit existiert ein skalares Potential ϕ so daß

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}}$$

die quellfreien Maxwellgleichungen lassen sich also mittels der Potentiale $(\phi, \vec{A})$ leicht losen, so daß

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

diese sind bis auf Eichtransformationen

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t \chi$$

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

eindeutig bestimmt

es bleiben uns die inhomogenen Maxwellgleichungen

beachte dazu

$$[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]^i = \epsilon^{ilm} \epsilon_m{}^{rs} \partial_l \partial_r A_s =$$

$$= \partial^i(\partial_l A^l) - \Delta A^i$$

Lorentzeichung: wir wählen Eichtransformation χ, so daß

$$\frac{1}{c}\partial_t \phi' + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \chi + \Delta\chi + \frac{1}{c}\partial_t \phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} =$$

$$= \Box\chi + \frac{1}{c}\partial_t \phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \overset{!}{=} 0$$

Maxwellgleichungen reduzieren sich auf

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\phi &= -4\pi\rho \\ \Box\vec{A} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \end{aligned}}$$

zur Lorentzeichung

$$\boxed{\frac{1}{c}\partial_t \phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$

also

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\Delta\phi - \frac{1}{c}\partial_t(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) =$$

$$= \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\phi - \frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) =$$

$$= 4\pi\rho$$

sowie

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} =$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}(\partial_t\phi) + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} =$$

$$= \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Wellenoperator

$$\boxed{\Box = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \Delta}$$

Retardierte (avancierte) Greenfunktion

wir suchen Greenfunktion G
der Wellengleichung

$$\Box G = -4\pi\, \delta^{(4)} \qquad \delta^{(4)}(x) = \delta(t)\,\delta^{(3)}(\vec{x})$$

Ansatz

hier stünde „+" für avancierte Greenfunktion

$$G(x,x') = G(x-x') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

so ist

$$(\Box G)(x) = -4\pi\,\delta^{(4)}(x) +$$

$$+ \frac{\Box\,\delta\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} + 2\,\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}|}\cdot\vec{\nabla}\,\delta\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}|\right) =$$

$$= -4\pi\,\delta^{(4)}(x) +$$

$$+ \frac{\delta'\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}|\right)\,\Box\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} +$$

$$+ \frac{\delta''\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}|\right)\left(-\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}|\vec{x}|\cdot\vec{\nabla}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} +$$

$$+ \frac{2}{c}\,\frac{1}{|\vec{x}|^2}\,\hat{x}^i\,\partial_i|\vec{x}|\;\delta'\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}|\right)$$

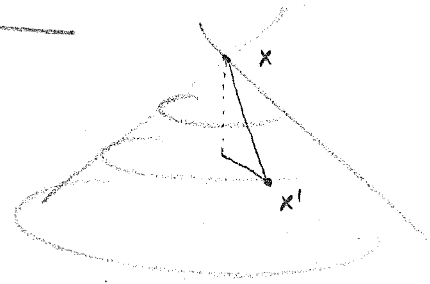
beachte

$$\Box \left(t - \frac{1}{c}|\vec{x}|\right) = -\frac{1}{c}\Box |\vec{x}| = -\frac{1}{c}\Delta |\vec{x}| =$$

$$= -\frac{1}{c}\partial_i \frac{x^i}{|\vec{x}|} = -\frac{1}{c}\frac{3-1}{|\vec{x}|} = -\frac{2}{c}\frac{1}{|\vec{x}|}$$

also

$$G_{ret}(x, x') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$



damit für gegebenes $(\rho, \vec{j})$

$\Box \phi = -4\pi\rho$	$\Box \phi_{hom} = 0$
$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$	$\Box \vec{A}_{hom} = 0$

daß

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= \int d^3x' \, \frac{\rho\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}'\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \phi_{hom}(t, \vec{x}) \\ \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{c}\int d^3x' \, \frac{\vec{j}\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}'\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{A}_{hom}(t, \vec{x}) \end{aligned}}$$

Dipolstrahlung

- ruhende Ladungsträger erzeugen elektrostatische Felder
- konstant bewegte Ladungsträger erzeugen magnetostatische Felder
- beschleunigte Ladungsträger erzeugen elektromagnetische Strahlung

---

von besonderer physikalischer und technischer Bedeutung sind jene Prozesse, die aus einem begrenzten Raumbereich ausstrahlende elektromagnetische Wellen mit fester Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ beschreiben ... zum Beispiel die Strahlung einer Antenne wir gehen dazu von einer mit festen Kreisfrequenz ω oszillierenden Ladungs- und Stromdichte aus

$$\rho(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rho_\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t} + c.c.$$

$$\vec{J}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \vec{J}_\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t} + c.c.$$

beachte: $\rho_\omega(\vec{x}),\ \vec{J}_\omega(\vec{x})$ ..... sind komplex

wir sind am elektromagnetischen Feld in großer Entfernung r von der Quelle interessiert

wir betrachten Langwellennäherung und unterscheiden folgende Bereiche

$d \ll r \ll \lambda$ ... Nahfeld

$d \ll r \sim \lambda$ ... Übergangsbereich, Induktionszone

$d \ll \lambda \ll r$ ... Fernfeld

wobei Langwellennäherung angenommen ist, und:

d .... Ausdehnung der Quelle

$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ .... Wellenlänge der entstehenden Strahlung

r .... Abstand von der Quelle

<u>retardierte Potentiale</u>

$$\Phi(t,\vec{x}) = \int d^3x' \, \frac{\rho(t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \left(\int d^3x' \, \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \rho_\omega(\vec{x}') \right) + c.c. =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \, \Phi_\omega(\vec{x}) + c.c.$$

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \, \frac{\vec{J}(t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{c} e^{-i\omega t} \left(\int d^3x' \, \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \vec{J}_\omega(\vec{x}') \right) + c.c. =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \, \vec{A}_\omega(\vec{x}) + c.c.$$

mit $k = \frac{\omega}{c}$; $\omega > 0$

im Fernfeld betrachten wir die Entwicklung

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'}} =$$

$$= r\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} =$$

$$= r\left(1 - \left(\frac{r'}{r}\right)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'} + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'} + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)$$

Langwellennäherung

$$e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|} = e^{ikr}\, e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{x}'}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right)\right)$$

$$k \cdot r' = 2\pi\left(\frac{r'}{\lambda}\right) \ll 1$$

$$\approx e^{ikr}$$

wir erhalten daraus im Fernfeld

$$\boxed{\vec{A}_\omega(\vec{x}) \approx \frac{1}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x'\,\vec{j}_\omega(\vec{x}')}$$

wir vereinfachen den Ausdruck mittels der Kontinuitätsgleichung im Frequenzraum

$$-i\omega\,\rho_\omega(\vec{x}) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\omega)(\vec{x}) = 0$$

damit

$$\int d^3x\, j^k_\omega(\vec{x}) = \int d^3x \left[\partial_\ell\left(j^\ell_\omega(\vec{x})\,x^k\right) - i\omega\,\rho_\omega(\vec{x})\,x^k\right] =$$

$$= -i\omega \int d^3x\, \rho_\omega(\vec{x})\,x^k = -i\omega\, p^k_\omega$$

Dipolmoment

$$\vec{p}(t) = \int d^3x\, \rho(t,\vec{x})\,\vec{x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-i\omega t}\,\vec{p}_\omega + c.c.$$

also

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t}\vec{A}_\omega(\vec{x}) + c.c. = \\ &\approx -\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}\,c}\,\frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r}\,\vec{p}_\omega + c.c.\end{aligned}}$$

aus dem Vektorpotential lassen sich hier alle anderen Felder bilden

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})(t,\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\vec{B}_\omega(\vec{x})\,e^{-i\omega t} + c.c.$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\vec{\nabla}\times\vec{B}_\omega)(\vec{x})\,e^{-i\omega t} + c.c. =$$

$$= \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} =$$

$$= -\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}\,c}\vec{E}_\omega(\vec{x})\,e^{-i\omega t} + c.c.$$

Langwellennäherung im Fernfeld gibt

$$\vec\nabla\left[\frac{e^{ikr}}{r}\right] = \frac{ik}{r}\,e^{ikr}\,\vec e_r\left(1+\frac{i}{kr}\right) =$$

$$\approx \frac{ik}{r}\,e^{ikr}\,\vec e_r$$

also wegen $\omega = kc$

$$\vec B_\omega(\vec x) \approx \frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\vec e_r \times \vec p_\omega$$

$$\vec E_\omega(\vec x) \approx -\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\vec e_r \times (\vec e_r \times \vec p_\omega) =$$

$$\approx -\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{e^{ikr}}{r}\left(\vec e_r\,(\vec e_r\cdot\vec p_\omega) - \vec p_\omega\right)$$

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon^k{}_{rs}\,\hat x^j\,\hat x^r\,p^s =$$

$$= \hat x_i\,(\hat x\cdot\vec p) - p_i = -\,q_i{}^j\,p_j$$

Projektor auf $\hat x$

⚠ Strahlungsfelder fallen wie $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$ ab, Coulombfelder wie $\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$ ⚠

Poyntingvektor und zeitliches Mittel abgestrahlter Leistung

zeitliche Mittelung von $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$ gibt

$$\langle \vec{S} \rangle = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r^2} (\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{p}_\omega)) \times (\vec{e}_r \times \vec{p}_\omega^{\,*}) + $$
$$+ \text{ c.c.}$$

zeitliches Mittel der abgestrahlten Leistung pro Flächenelement auf der 2-Sphäre im Unendlichen:

$$d^2P = \langle \vec{S} \rangle \cdot d^2\vec{x} =$$

$$= r^2 \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{e}_r \, d^2\Omega =$$

$$= \frac{2c}{4\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 (\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{p}_\omega)) \cdot (\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{p}_\omega^{\,*})) \, d^2\Omega =$$

$$= \frac{2c}{4\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left(\vec{p}_\omega \cdot \vec{p}_\omega^{\,*} - (\vec{e}_r \cdot \vec{p}_\omega)(\vec{e}_r \cdot \vec{p}_\omega^{\,*})\right) d^2\Omega$$

betrachte den Fall wo

$$\vec{p}_\omega^* \sim \vec{p}_\omega \quad ; \quad \text{d.h. OBdA} : \vec{p}_\omega = p_\omega \vec{e}_z$$

so gilt für die abgestrahlte Leistung

$$d^2P = \frac{c}{4\pi^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\vec{p}_\omega|^2 (1 - \cos^2\vartheta)\, d^2\Omega =$$

$$= \frac{c}{4\pi^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\vec{p}_\omega|^2 \sin^2\vartheta \, d^2\Omega$$

zeitliches Mittel des Dipolmoments

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \vec{p}_\omega e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

$$\langle \vec{p}^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \vec{p}_\omega \cdot \vec{p}_\omega^*$$

also

$$\boxed{d^2P = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \langle \vec{p}^2 \rangle \sin^2(\vartheta)\, d^2\Omega}$$